

文章编号:1003-207(2023)11-0238-10

DOI:10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2021.1040

一类局域性资源受限项目调度问题的 新0-1混合线性优化模型

苏志雄¹, 乞建勋², 邹鑫³, 魏汉英¹, 魏亚锋¹

(1. 南昌工程学院工商管理学院, 江西 南昌 330099;

2. 华北电力大学经济与管理学院, 北京 102206;

3. 华北电力大学(保定)经济与管理系, 河北 保定 071003)

摘要:资源受限项目调度问题(简称RCPSP)是最具代表性且难解的项目调度问题之一,其经典问题以“资源全局受限”为特征。本文从新的视角考虑资源受限的特征,针对实际中广泛存在的“稀缺资源受限导致项目局域性调度”的情况,研究局域性RCPSP,并重点探索一类问题:项目局部的某系列平行工序,可配备的资源数量极少,甚至为1,该资源可重复使用,且具有多技能,故需安排该资源顺序完成该系列工序,使项目工期最短。虽是局域性调度,但项目的系统性使其“牵一发而动全身”,难度可能不亚于全局性调度。本文探索问题的“局域性”特征,量化“局域调度”对“项目全局”的影响;基于此,构建只涵盖“局部调度工序”,实现项目全局最优化的0-1混合线性规划模型,且模型结构简单,简化了项目的复杂结构;最后,通过算例测试,验证该模型在计算较大型、大型案例的最优解方面具有的优势,如针对将包含9000个工序的项目中,安排1个可重复使用的资源完成某300个平行工序的案例,借助该模型平均耗时236.16秒可算出最优解。

关键词:资源受限项目调度;排序优化;0-1混合线性规划;网络计划技术;项目工期

中图分类号:O221

文献标识码:A

1 引言

资源受限项目调度问题(resource-constrained project scheduling problem,简称RCPSP)是代表性的项目调度问题^[1],不仅是NP-hard^[2],更是现代制造系统和工业生产中广泛面临的问题,具有很强的工程背景^[1]。RCPSP的主要目标是在满足项目中各工序之间的优先关系和资源约束条件下,合理安排工序执行时间及顺序,使项目工期最小化。

经典RCPSP^[1]考虑的“资源受限”是“全局性”的,几乎涉及项目所有工序、所有类型资源以及项目全程。然而,工程实践中,对于一个项目而言,由于不同类型资源在供应能力上差别很大,稀缺、贵重资源的供应容易出现短缺,而来源广、成本低的资源则在供应上可满足项目需求。因此,资源受限可能只出现在项目的某些局部工序,而非全部工序。例如,随着现代社会的发展,高精技能人力资

源是决定以IT制造行业为代表的诸多行业发展的最重要因素^[3],使得该资源的稀缺性愈发突出,企业的该项开支也大幅提升^[4]。稀缺资源最直接影响的是受其支配的局域工序。可见,很多情况下,亟需应对的RCPSP是针对项目的局域性调度,称为局域性RCPSP。

另一方面,近期越来越多的研究者关注项目不确定性情况,探索相应的应对措施。其重点之一是应对项目计划执行过程中,引起项目偏离基准调度计划、甚至使得项目计划不可行的情况。以资源不确定情况为例^[5](如临时出现、没有预期的资源冲突),研究发现,对受资源冲突直接影响的工序进行重新调度优化,其效果往往更优于“完全重新调度”等常规方法^[6,7]。因此,局域性调度在反应性RCPSP的研究中已体现出一定的理论和实际意义。

目前,专门针对局域性RCPSP的文献还较为缺乏。局域性调度的效果同样关乎“全局”项目工期,可视为RCPSP的子问题。一定程度上,有关RCPSP的研究成果可以为解决该局域性问题提供途径。因此,一般性RCPSP的研究现状,也决定着局域性RCPSP在当前的可解决程度。

现有文献显示,对RCPSP的研究已取得丰硕成果,主要包括建模和算法设计方面。在建模方

收稿日期:2021-05-27; 修订日期:2021-11-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71961020)

通讯作者简介:苏志雄(1983—),男(汉族),山西朔州人,南昌工程学院工商管理学院,副教授,博士,研究方向:运筹学、项目调度,E-mail: happywhy@126.com.

面,以混合整数规划模型为主,根据模型变量设置和建模方式的不同,可分为时间指数模型^[8-10]、基于事件的模型^[11,12]等。此外,对于 RCPSP 的一些拓展问题,研究者提出了有针对性的模型。初梓豪和徐哲^[13]、于静等^[14]针对带有活动重叠的 RCPSP,谢芳等^[15]、Naber 和 Kolisch^[16]针对带有柔性资源约束的 RCPSP,张松等^[17]、Kong Feng 和 Dou Dong^[18]针对带有复杂/多重时间约束的 RCPSP,分别建立了相应的模型。最近,谢芳等^[19]针对工期不确定情况,建立了 RCPSP 的马尔科夫决策过程模型。而 Ma Zhiliang 等^[20]重点针对在中国蓬勃发展的混凝土建筑工程,研究了需要考虑平衡组成部分的 RCPSP 的建模。

在算法方面,基于数学模型的精确算法是求解小规模 RCPSP 的常规算法,其中以分支定界法^[21,22]为代表。由于 RCPSP 是 NP-hard,对于大规模的问题,精确算法的计算量通常会非常庞大。鉴于此,当前主流方法是,选择降低求解的最优性要求,而重点提升求解效率。有两种可行途径,使得所求得解尽可能接近最优:一种途径是,在可接受的时间内,计算问题的近似解,或最优目标值的下界。主要采用近似动态规划^[19]、Lagrangian 松弛法^[23]、列生成法^[24]、混合下界策略^[25]等重构原模型的松弛模型或近似模型,并计算松弛/近似模型的最优解^[26],从而获得原模型的近似解或有效下界。另一种途径是,在极短的时间内,计算问题的满意解,主要采用优先规则法^[16,27]和元启发式算法。面对现有的诸多优先规则,Guo Weikang 等^[27]最近提出用决策树法进行分类,并选择最有效的规则求解 RCPSP。而在最新文献中,用于求解 RCPSP 的元启发式算法主要包括遗传算法^[10,14,17]、蚁群算法^[28]、禁忌搜索法^[29]、进化算法^[30]等。另外,研究者通过将优化原理及方法融入元启发式算法,以增强元启发式算法的计算效果。Chaleshtarti 等^[31]设计了 Lagrangian 松弛和遗传算法的混合算法。Ren Yifei 等^[32]将分支定界嵌入遗传算法。

然而,局域性 RCPSP 与一般性 RCPSP 相比仍存在显著差异。首先,项目的不同“局域性”结构可能各具特性,有助于探索更有效的差异化求解途径。其次,大型项目中,参与局域性调度的任一工序都有大量前继和后续工序,其调度可谓“牵一发而动全身”,甚至会与项目的所有工序产生相互影响。故而进行局域性调度,还需要考虑“局域外”工序的影响,这些工序不管从数量上,还是从相互关联的复杂程度上,都远远大于“局域”工序,若处理不当,则会大幅增加求解难度。因此,有必要对局域性 RCPSP 进行针对性研究,探索适用于该“局域性调度”特征的、更有效的求解途径。

本文重点研究局域性 RCPSP 的一类代表性问题。某工程项目中,由于资源受限或短缺,对于项目某“局域”的一系列平行工序(相互之间无优先关系的工序),只有数量极少(甚至为 1)的资源可用,该资源可重复利用,具备完成各工序的技能,因此需要充分利用该资源,将此诸多平行工序顺序完成。对于该情况,应考虑如何排列这些工序,使得项目工期最短。

可将该类局域性 RCPSP 问题简单描述为:将项目中某 n 个平行工序排列为 1 条顺序工序链,且使项目工期最短。该问题的可行方案数为 $n!$,随着 n 增加,可选方案数呈阶乘级急剧增加。本文针对该问题提出更具针对性的理论和模型:

(1)通过分析该问题的“局域性”特征,揭示出局部的平行工序的顺序化调整对项目工期的影响,给出简单量化公式。这样有助于规避“局域外”工序对该局域性调度的影响,实现问题的简化。

(2)提出问题的 0—1 混合线性规划模型。该模型只涵盖“局域资源受限”下的“局域工序”,且实现项目全局优化,其结构更紧致,规模更精简,能消除“局域外”工序的影响,直接优化项目工期。

本文的研究结论也有助于求解其他类型局域性 RCPSP,并为求解一般性问题提供新的途径。

2 问题描述及常规建模

假设项目由工序组 $V = \{0, 1, 2, \dots, M, M+1\}$ 组成,各工序不可中断,虚工序 0 和 $M+1$ 分别表示该项目的开始和结束。工序 i 的工期为 d_i , $d_0 = d_{M+1} = 0$,开始时间为 s_i , $s_0 = 0$,则 s_{M+1} 表示项目工期。工序之间满足“结束—开始”型最小时距优先关系,即若工序 i 有紧后工序 j ,则 $s_i + d_i \leq s_j$ 。

假设该项目所拥有的资源中,有一类稀缺性资源。该资源具备多技能,且可重复使用,但是可用量只有 1 个单位,而其他类型资源的可用量则相对充足。项目某 n 个平行工序 $i \in V^* \subseteq V$ (工序之间无优先关系)需由该资源完成, $n \ll M$ 。该资源单位时间内的可用量为 1,即 1 次只能用于完成 1 个工序。在该情况下,如何安排该稀缺资源完成这 n 个工序,即将这 n 个工序排列成怎样的 1 条工序链,可使该项目工期最短?

根据 RCPSP 现有建模方法,可构建该局域性 RCPSP 的时间指数模型和基于事件的模型。时间指数模型为模型 I:

$$\text{Minimize } s_{M+1} \quad (1)$$

s. t.

$$s_j \geq s_i + d_i, \exists i \in P_j, \forall i \in V \quad (2)$$

$$s_i = \sum_{t=ES_i}^{LS_i} tx_{it}, \forall i \in V^* \subseteq V, t \in Z_+ \quad (3)$$

$$\sum_{t=ES_i}^{LS_i} x_{it} = 1, \forall i \in V^* \subseteq V, t \in Z_+ \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=\max\{ES_i, t-d_i+1\}}^{\min\{LS_i, t\}} x_{it} \leq 1, \forall i \in V^* \subseteq V, t \in Z_+ \quad (5)$$

$$x_{it} \in \{0, 1\}, \forall i \in V^* \subseteq V, t \in Z_+ \quad (6)$$

$$s_0 = 0, s_i \in Z_+, \forall i \in V \quad (7)$$

其中, P_j 表示工序 j 的紧前工序的集合; ES_i/LS_i 表示在设置项目最大工期 D^* 后, 运用关键路线法 (critical path method, 简称 CPM) 计算的工序 i 的最早/最迟开始时间。变量 $x_{it} = 1$ 表示工序 i 在时间 t 开始, 否则 $x_{it} = 0$; 该模型的目标函数式 (1) 表示, 在满足优先关系约束式 (2)、工序进度约束式 (3) 和式 (4), 以及资源约束式 (5) 的条件下, 实现项目工期最短, 其中约束式 (5) 确保该资源在任意时间内最多只能被 V^* 中的 1 个工序使用。

而基于事件的模型为模型 II:

$$\text{Minimize } s_{M+1}$$

s. t.

$$s_j \geq s_i + d_i, \exists i \in P_j, \forall i \in V$$

$$s_u + d_u \leq s_v + \delta(1 - y_{uv}), \forall u, v \in V^* \subseteq V \quad (8)$$

$$\sum_{u \in V^*} \sum_{v \in V^*} y_{uv} = n - 1, u \neq v \quad (9)$$

$$\sum_{u \in V^*} y_{uv} \leq 1, v \in V^* \subseteq V, u \neq v \quad (10)$$

$$\sum_{v \in V^*} y_{uv} \leq 1, u \in V^* \subseteq V, u \neq v \quad (11)$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\}, \forall u, v \in V^* \subseteq V, u \neq v \quad (12)$$

$$s_0 = 0, s_i \in Z_+, \forall i \in V$$

其中, 变量 $y_{uv} = 1$ 表示将工序 u 和 v 安排为 $u \rightarrow v$ 顺序, 否则 $y_{uv} = 0$; 约束式 (8) 表示对所考虑的“局部工序”的调度, δ 表示充分大的数; 约束式 (9)~式 (11) 确保将这 n 个工序排成 1 条工序链。

实际上, 在原问题的题设中, 只有部分工序 ($n \ll M$) 受到资源限制, 是调度的主体对象, 但模型 I/II 却包括了项目的所有 M 个工序, 模型规模较大, 且结构复杂, 求解效率较低。

为了充分体现该区域性 RCPSP 的“区域性”特征, 构建只涵盖这 n 个平行工序, 且结构更简化的模型, 探索这 n 个工序的序列化排列对项目全局的影响, 并提出以下思路研究新的建模途径:

(1) 首先, 假设初始计划中资源不受限, 运用 CPM 算得相应项目最短工期, 即初始工期 $D = ES_{M+1} = LS_{M+1}$, 以及各工序 i 的最早开始时间 ES_i (不同于模型 I 的时间参数, 这里不设置项目最大工

期 D^* , 下同), 初始计划为 $s_i = ES_{i0}$ 。

(2) 加入题设的资源限制, 将受资源限制的 n 个平行工序特记为 A_1, \dots, A_n , 需将其排列成 1 条工序链。 A_1, \dots, A_n 的时间进程有重叠, 该调整会导致项目工期与其初始工期相比延迟, 需考虑优化调整。使该延迟量最小的方案, 即原问题的最优方案。

(3) 分别考虑初始资源不受限假设下, 这 n 个平行工序中, “任意两工序的时间进程都有重叠”和“存在某些工序的时间进程无重叠”两种情况。

须注意, 直观上似乎可借助一些时间参数 (如 ES_i) 的大小进行排序, 但可验证, 这些方法通常无法得到最优方案。因此, 需要针对该问题开发新的科学有效的排序方法, 方可实现最优方案。

3 相关定理

针对第 2 部分的问题描述及分析, 得出将项目中某局部 n 个平行工序 A_1, \dots, A_n 调整为 1 条顺序工序链后, 与在“无资源约束”假设下的初始情况相比, 项目工期延迟量的简单计算公式。

(1) 考虑“平行工序 A_1, \dots, A_n 的时间进程都有重叠”情况, 即 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}, i, j = 1, \dots, n$ 。定理 1 描述了该情况下, 将平行工序 A_1, \dots, A_n 调整为 1 条工序链后, 项目工期的延迟量, 记为 ΔD 。

定理 1 考虑项目中某 n 个平行工序 A_1, \dots, A_n , 假设 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}$, 将其排列成 1 条顺序工序链, 如 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$, 项目工期延迟量 ΔD 为:

$$\Delta D = \max_{j=1, \dots, n-1} \left\{ ES_{A_1} + \sum_{i=1}^j d_i - LS_{A_{j+1}}, 0 \right\} \quad (13)$$

证明: 见附录 1。

(2) 考虑这 n 个平行工序中“存在某些工序的时间进程无重叠”的情况, 即 $\exists ES_{A_i} + d_{A_i} \leq ES_{A_j}$, 定理 2 描述了该情况下, 将 A_1, \dots, A_n 调整为 1 条工序链后, 项目工期的延迟量 ΔD :

定理 2 考虑项目中某 n 个平行工序 A_1, \dots, A_n , 假设 $\exists ES_{A_i} + d_{A_i} \leq ES_{A_j}$, 将其排列成 1 条工序链, 如 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$, 则项目工期延迟量 ΔD 为:

$$\Delta D = \max_{j=1, \dots, n-1, h=1, \dots, j} \left\{ C_j + B_h^*, 0 \right\} \quad (14)$$

其中:

$$C_j = ES_{A_1} + \sum_{i=1}^j d_i - LS_{A_{j+1}} \quad (15)$$

$$B_1^* = 0 \quad (16)$$

$$B_h^* = \max \left\{ ES_{A_h} - ES_{A_1} - \sum_{i=1}^{h-1} d_i, 0 \right\}, h > 1 \quad (17)$$

证明: 见附录 2。

4 问题建模

4.1 针对情况 1 的建模

这里首先考虑该局域性 RCPSP 中,所考虑的 n 个平行工序符合“任意两工序的时间进程都有重叠”的情况。即 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}, i, j = 1, \dots, n$, 运用定理 1 构建该问题在情况 1 下的新模型,过程如下:

(1) 将项目局部指定的某平行工序 A_1, \dots, A_n 排列成一条工序链,可理解为该工序链共有 n 个位置,需将任一 A_i 安排在其中一个位置上。设置 0—1 变量 $z_{i,j}$: $z_{i,j} = 1$ 表示将工序 A_i 安排在工序链的第 j 个位置,否则 $z_{i,j} = 0$ 。工序链中工序都是顺序排序,所以每个工序 A_i 必须且只能安排在工序链设定的 n 个位置中的一个位置上,可用如下约束表示:

$$\sum_{j=1}^n z_{i,j} = 1, i = 1, \dots, n \quad (18)$$

同理,工序链每个位置必须安排 1 个工序,表示为:

$$\sum_{i=1}^n z_{i,j} = 1, j = 1, \dots, n \quad (19)$$

(2) 由于 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}, i, j = 1, \dots, n$, 应基于定理 1 分析该情况下,平行工序排序对项目工期的影响。式(13)提示了工序链中,应考虑的放在各个位置的工序的参数,如对于工序链的第 1 个位置,应带入式(13)的值为 $\sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1}$, 因此,结合变量 $z_{i,j}$, 式(13)可表示为:

$$\Delta D = \max_{h=1, \dots, n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} - \sum_{i=1}^n LS_{A_i} z_{i,h+1}, 0 \right\} \quad (20)$$

设置变量 $\mu \in Z_+$ 对应于 ΔD , 令:

$$\mu \geq \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} - \sum_{i=1}^n LS_{A_i} z_{i,h+1}, \quad h = 1, \dots, n-1 \quad (21)$$

若确定 $z_{i,j}$ 的值,则 $\inf \mu = \Delta D$ 。因此,对于可行解 $z_{i,j}$, 满足 $\min \mu = \min \Delta D$, 则求解项目工期延迟量最小的目标函数可设置为:

$$\text{Minimize } \mu \quad (22)$$

综上,用式(18)、式(19)、式(21)、式(22)构建该局域性 RCPSP 在情况 1 下的新模型——模型 III:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \mu \\ & \text{s. t.} \\ & -\mu + \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} - \sum_{i=1}^n LS_{A_i} z_{i,h+1} \leq 0, \\ & h = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n z_{i,j} = 1, i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i,j} = 1, j = 1, \dots, n$$

$$\mu \in Z_+, z_{i,j} \in \{0, 1\}$$

计算出该模型的最优解 $z_{i,j}^*$ 和 μ^* 后,可得该局域性 RCPSP 对应的最短项目工期 $\min D$:

$$\min D = L(\mu^\nabla) + \mu^* \quad (23)$$

其中, $L(\mu^\nabla) = ES_{M+1}$, 表示项目在“无资源约束”假设条件下,对应工序网络中关键路线 μ^∇ 的长度。

4.2 针对情况 2 的建模

类似地,根据第 2 部分论述的该局域性 RCPSP 情况 2,即 $\exists ES_{A_i} + d_{A_i} \leq ES_{A_j}, i, j = 1, \dots, n$, 运用定理 2 构建该问题在情况 2 下的新模型,过程如下:

(1) 与 4.1 中的 (1) 类似,设置 0—1 变量 $z_{i,j} \in \{0, 1\}$, 以及约束式(18)和式(19)。

(2) 由于 $\exists ES_{A_i} + d_{A_i} \leq ES_{A_j}$, 应基于定理 2 分析该情况下平行工序排序对项目工期的影响。结合变量 $z_{i,j}$ 及式(15)~式(17), C_h 和 B_h^* 可表示为:

$$C_h = \max \left\{ \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} - \sum_{i=1}^n LS_{A_i} z_{i,h+1}, 0 \right\} \quad (24)$$

$$B_h^* = \max \left\{ \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,n} - \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} - \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j}, 0 \right\} \quad (25)$$

进而, $\Delta D = \max_{h=1, \dots, n-1, j=1, \dots, h} \{C_h^* + B_j^*\}$ 为变量 $z_{i,j}$ 的函数。设置变量 $v_j \in Z_+$ 对应于 B_j^* , 且令:

$$v_j \geq \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,n} - \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} - \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} \quad (26)$$

则若确定 $z_{i,j}$ 值,可得 $\inf v_h = B_h^*$, 且 ΔD 可表示为:

$$\Delta D = \max_{h=1, \dots, n-1, j=1, \dots, h} \left\{ \max \left\{ \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} - \sum_{i=1}^n LS_{A_i} z_{i,h+1}, 0 \right\} + v_j \right\} \quad (27)$$

另设置变量 μ (同模型 III), 且令:

$$\begin{aligned} & \mu \geq v_h + \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} \\ & - \sum_{i=1}^n LS_{A_i} z_{i,h+1}, h = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (28)$$

若确定 $z_{i,j}$, 则 $\inf \mu = \Delta D$, 因此对于可行解 $z_{i,j}$, $\min \mu = \min \Delta D$, 与模型 III 类似, 因平行工序排序

导致的项目工期延迟量的目标函数为式(22)。

综上,用式(18)、式(19)、式(22)、式(26)、式(28)构建该局域性RCPSP在情况2下的新模型——模型IV:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } \mu \\
 \text{s. t.} \\
 & -\mu + v_h + \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,h+1} + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} \\
 & - \sum_{i=1}^n LS_{A_i} z_{i,h+1} \leq 0, \\
 & h = 1, \dots, n-1 \\
 & -v_h + \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,h+1} - \sum_{i=1}^n ES_{A_i} z_{i,1} \\
 & - \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^n d_{A_i} z_{i,j} \leq 0, \\
 & h = 1, \dots, n-1 \\
 & \sum_{j=1}^n z_{i,j} = 1, i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n z_{i,j} = 1, j = 1, \dots, n \\
 & \mu \in Z_+, v_j \in Z_+, z_{i,j} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

计算出模型最优解 $z_{i,j}^*$ 、 μ^* 和 v^* , 可得该局域性 RCPSP 的最短项目工期 $\min D = L(\mu^*) + \mu^*$ 。

显然,情况1是情况2的特殊形式,即模型III是模型IV的特殊形式。与模型I/II相比,模型III/IV只考虑受资源约束的“局域”工序,其结构和规模明显简化,原问题最优解的搜索和计算会显著减少。

5 算例测试及结果分析

本部分通过算例试验,针对该局域性 RCPSP,比较第4部分的新模型III/IV和第2部分的常规模型I/II,在对问题求解方面的功能效果。将模型I~IV编写为MATLAB (R2018a)语言代码,在配置为 Intel® Core (TM) i7-8850H CPU@2.60GHz,内存16.00 GB的电脑上运行,运用CPLEX Solver (Version 12.6.1)求解。

(1)运用CPLEX (V12.6.1)求解模型I/II,适用于小型案例。借助ProGen/max,通过设置如下参数生成较小型案例:工序总数量 $M=120$,网络复杂度 $NC \in \{1.5, 1.8, 2.1\}$,各工序 $i \in V$ 的工期 d_i 在集合 $\{1, \dots, 10\}$ 中任意取值;指定其中 $n=10$ 个平行工序 $A_i, i=1, \dots, 10$,修正资源强度 $MRS=10$,表示只有1个资源用于完成这10个工序;目标是使项目工期最短。

理论上,运用CPLEX Solver计算模型III和IV,可得到与常规模型I/II相同的精确解。通过案例验证模型III/IV的解的有效性。根据上述参数设置,生成10个案例(由于是小型案例,故不要求 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}$,即只考虑4.2的情况2),每个案例

分别运用模型II和模型IV表示,并运用CPLEX计算。

表1列出了这10个案例的计算结果,包括最优目标值(即项目最短工期)和计算效率(时间)。该测试结果表明,运用模型IV的计算结果有效(与模型II的精确结果相同),并且效率显著。

为了进一步显示在小型案例上,模型IV相比模型I/II的计算效率(时间)优势,首先,根据上述参数设置,另生成100个案例,交叉运用模型I和II表示各案例,并测试借助CPLEX计算模型最优解所耗的时间,如图1所示。进一步地,再将上述参数设置中的 n 修改为 $n=15$,重新生成100个案例。实验显示,若用模型I/II计算案例最优解,其运算时间截至2~3个小时,难以算出结果。

然后,运用模型IV表示上述生成的两组案例(即 $n=10, 15$),测试借助CPLEX计算最优解所耗时间,如图2所示。

表2为图1和2所示的计算效率的统计分析和对比结果,显示了对于该问题的小型案例,模型IV相比模型I/II在计算效率(时间)上具备显著优势。

表1 部分较小规模算例测试结果 ($M=120, n=10$)

| 算例序号 | 模型IV及CPLEX | | 模型II及CPLEX | |
|------|------------|-------------------|------------|-------------------|
| | 最优目标值 | CPU运行时间 (单位:秒) | 最优目标值 | CPU运行时间 (单位:秒) |
| 1 | 185 | 0.08 | 185 | 496.29 |
| 2 | 204 | 0.11 | 204 | 523.90 |
| 3 | 231 | 0.12 | 231 | 531.29 |
| 4 | 208 | 0.16 | 208 | 650.99 |
| 5 | 196 | 0.03 | 196 | 384.73 |
| 6 | 228 | 0.19 | 228 | 757.35 |
| 7 | 212 | 0.14 | 212 | 506.60 |
| 8 | 182 | 0.06 | 182 | 481.76 |
| 9 | 165 | 0.12 | 165 | 627.33 |
| 10 | 242 | 0.04 | 242 | 481.84 |

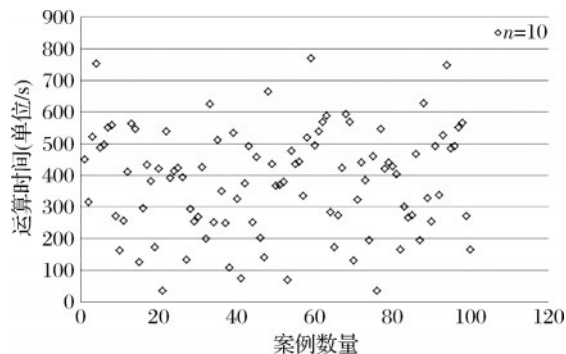


图1 运用模型I/II计算该局域性RCPSP案例 ($M=120, n=10$)最优解的效率

(2)通过进一步的测试实验显示,即使对于大型问题,运用模型III/IV也可在较短时间内算出最优解。

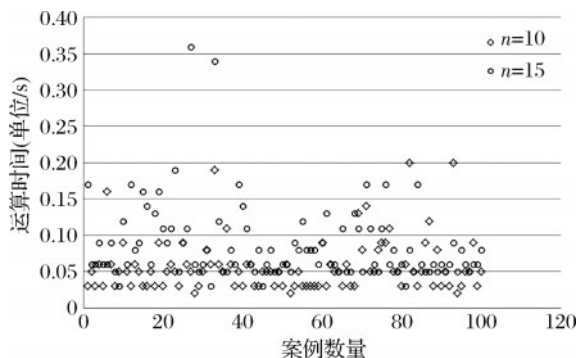


图 2 运用模 IV 计算该局域性 RCPSP 案例
($M=120, n=10, 15$)最优解的效率

针对 4.1 所述情况 1, 借助 ProGen/max, 通过如下参数设置, 分别生成两种类型规模的 100 个案例:

表 2 较小型算例的测试结果统计

| M, n | | CPU 运行时间(单位:秒) | |
|---------|-----|--------------------|-------|
| | | 模型 I/II | 模型 IV |
| 120, 10 | 平均值 | 384.51 | 0.06 |
| | 最小值 | 35.51 | 0.02 |
| | 最大值 | 769.62 | 0.2 |
| 120, 15 | 平均值 | | 0.09 |
| | 最小值 | $\geq 2 \sim 3$ 小时 | 0.03 |
| | 最大值 | | 0.36 |

① 工序总数 $M=3000$, 网络复杂度 $NC \in \{1.2, 1.5\}$, 各工序 i 的工期 $d_i \in \{1, \dots, 10\}$, 指定其中 $n=100$ 个平行工序 A_i (满足 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}$), 修正资源强度 $MRS=100$, 即将这 100 个工序调整为 1 条工序链。

② $M=9000, NC \in \{1.2, 1.5\}, d_i \in \{1, \dots, 10\}$, 指定其中 $n=300$ 个平行工序 A_i (同样要求满足 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}$), $MRS=300$ 。

再针对 4.2 所述情况 2, 在上述参数设置下, 对 $M=3000, 9000$ 分别生成 100 个案例, 在前者各案例指定 $n=100$ 个平行工序 A_i ($\exists ES_{A_i} + d_{A_i} < ES_{A_j}$), 在后者各案例指定 $n=300$ 个平行工序 A_i (同上)。目标均是使项目工期最短。

图 3 和图 4 显示了, 在情况 1 和情况 2 分别运用模型 III 和模型 IV, 计算上述两类型案例的最优解所耗时间。

(3) 虽然对于该类局域性 RCPSP, 模型 III/IV 具有更显著的计算效率, 但是, 鉴于该问题的复杂性, 随着案例规模的进一步增大, 运用 CPLEX 计算模型 III/IV 的最优解必然也面临挑战。通过生成并测试更大型案例, 来验证问题的复杂性。

由于模型 III/IV 只涵盖项目局部工序, 与“局域外”的其他工序无关, 即可视为项目规模可任意大,

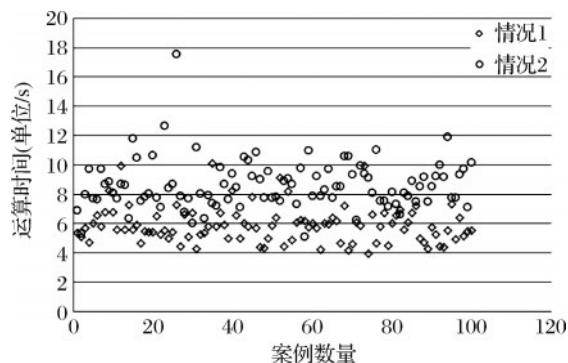


图 3 运用模型 III 和模型 IV 计算情况 1 和情况 2 下该局域性 RCPSP 案例($M=3000, n=100$)最优解的效率

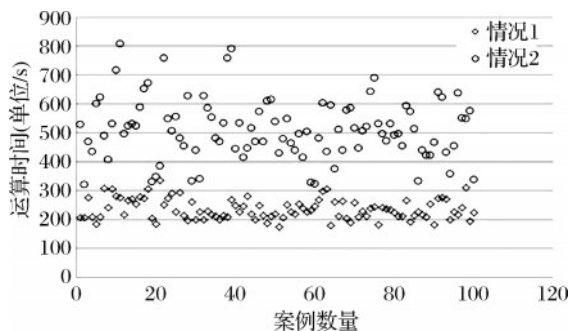


图 4 运用模型 III 和模型 IV 计算情况 1 和情况 2 下该局域性 RCPSP 案例($M=9000, n=300$)最优解的效率

且对于既定案例, 式(23)中的 $L(\mu^\vee)$ 也是既定的, 因此也可以只通过设置模型 III/IV 中的参数 ES_{A_i}, d_{A_i} 和 LS_{A_i} 来生成案例。

① 针对情况 1, 设置参数 $ES_{A_i} \in \{50, \dots, 100\}$, $d_{A_i} \in \{50, \dots, 100\}$ (即可满足 $\forall ES_{A_i} + d_{A_i} \geq ES_{A_j}$), $LS_{A_i} \in \{100, \dots, 150\}$ 。生成局部工序数量 $n=700$ 的 50 个更大型案例, 运用模型 III 表示, 并借助 CPLEX 计算最优解。测试结果显示, 其中 5 个案例无法算出最终解, 而其余案例的计算时间如图 5 所示, 均超过 2000 秒。

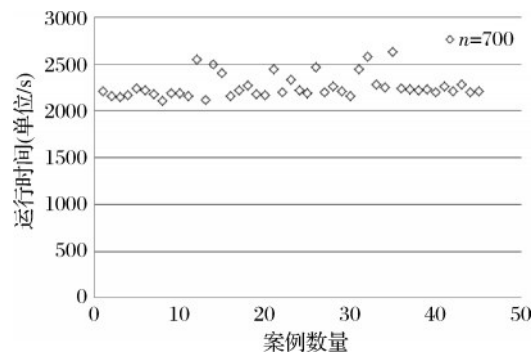


图 5 运用模型 III 计算情况 1 下该局域性 RCPSP 案例
(M 可任意大 $n=700$)最优解的效率

② 而对于情况 2, 受电脑内存限制, 即使采用与①类似的方式生成案例, 也难以运用模型 IV 计算出更大型案例($n > 300$)的最优解。

表3对测试结果进行了统计分析和对比。可以看出,在情况1下,运用模型III的计算效率更高,且可计算更大型案例。因此在求解各案例时,有必要先判断其属于情况1,还是情况2。

表3 较大型算例的测试结果统计

| M, n | CPU 运行时间(单位:秒) | | |
|-----------|----------------|---------|--------|
| | | 模型 III | 模型 IV |
| 3000, 100 | 平均值 | 5.91 | 8.63 |
| | 最小值 | 3.99 | 5.09 |
| | 最大值 | 10.09 | 17.55 |
| 9000, 300 | 平均值 | 236.16 | 511.71 |
| | 最小值 | 174.94 | 322.11 |
| | 最大值 | 334.95 | 808.24 |
| 可任意大, 700 | 平均值 | 2258.77 | — |
| | 最小值 | 2111.34 | — |
| | 最大值 | 2625.98 | — |

对比表2和表3可知,即使运用新模型III/IV求解该局域性RCPSP,案例规模的增大,同样会使得计算所耗时间呈更大比率增加的趋势。因此,若要进一步提升该问题的求解效率,基于模型III/IV开发新的精确算法或许具有可行性。

6 结语

经典RCPSP主要考虑“资源全局受限”的情况。针对工程项目实践中,很多情况下需要面对的是“资源局域受限”的情况,本文考虑了局域性RCPSP,并重点研究其核心问题之一——只有1个可重复利用、且具备相应技能的资源可用于完成项目局部的某系列平行工序,如何安排可使项目工期最小。

本文从问题的“局域性”特征入手,致力于将求解范围缩小至“局域”,借助CPM分析单工序时间参数与项目工期的关系,提出“局部调整”对“项目工期”影响的简单量化公式;并基于该公式,构建该问题的新0—1混合线性规划模型。该模型充分利用了该问题的“局域性”特性,只涵盖了这些受资源约束而需要主动调度的局域工序,其结构和规模与一般性RCPSP模型相比均有显著简化,而实现的目标是项目全局最优。

研究结果显示,本文揭示的工序时间参数与项目工期的关系,及由此推导出的“局部调整”对“项目全局”影响的量化公式,是简化局域性RCPSP的关键。在未来研究中,将以此为基础,围绕各类型局域性RCPSP进行建模及优化,并进一步根据模型特征开发计算效率和准确度更高的算法,进而推进一般性RCPSP的更有效解决。

参考文献:

- [1] 方晨, 王凌. 资源约束项目调度研究综述[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 641—650+656.
Fang Chen, Wang Ling. Survey on resource—constrained project scheduling[J]. Control and Decision, 2010, 25(5): 641—650+656.
- [2] Blazewicz J, Lenstra J K, Rinooy Kan A H G. Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity[J]. Discrete Applied Mathematics, 1983, 5(1): 11—24.
- [3] Chen Rong, Liang Changyong, Gu Dongxiao, et al. A multi—objective model for multi—project scheduling and multi—skilled staff assignment for IT product development considering competency evolution[J]. International Journal of Production Research, 2017, 55 (21): 6207—6234.
- [4] Snauwaert J, Vanhoucke M. A new algorithm for resource—constrained project scheduling with breadth and depth of skills[J]. European Journal of Operational Research, 2021, 292(1): 43—59.
- [5] 石彪, 池宏, 祁明亮, 等. 资源约束下的应急预案重构方法研究[J]. 中国管理科学, 2017, 25(1): 117—128.
Shi Biao, Chi Hong, Qi Mingliang, et al. A study on emergency plan reconstruction with resource constraint [J]. Chinese Journal of Management Science, 2017, 25 (1): 117—128.
- [6] 田文迪, 胡慕海, 崔南方. 不确定性环境下鲁棒性项目调度研究综述[J]. 系统工程学报, 2014, 29 (1): 136—144.
Tian Wendi, Hu Muhai, Cui Nanfang. Review of studies on robust project scheduling under uncertainty [J]. Journal of Systems Engineering, 2014, 29(1): 136—144.
- [7] 何正文, 宁敏静, 徐渝. 前摄性及反应性项目调度方法研究综述[J]. 运筹与管理, 2016, 25(5): 278—287.
He Zhengwen, Ning Minjing, Xu Yu. A survey of proactive and reactive project scheduling methods[J]. Operations Research and Management Science, 2016, 25(5): 278—287.
- [8] Bianco L, Caramia M. A new formulation for the project scheduling problem under limited resources[J]. Flexible Services and Manufacturing Journal, 2013, 25 (1—2): 6—24.
- [9] Artigues C. On the strength of time—indexed formulations for the resource—constrained project scheduling problem [J]. Operations Research Letters, 2017, 45 (2): 154—159.
- [10] Nemati—Lafmejani R, Davari—Ardakani H, Najafzad H. Multi—mode resource constrained project scheduling and contractor selection: mathematical formulation and metaheuristic algorithms[J]. Applied Soft Comput—

- ing, 2019, 81: 105533.
- [11] Koné O, Artigues C, Lopez P, et al. Event-based MILP models for resource-constrained project scheduling problems[J]. *Computers & Operations Research*, 2011, 38(1): 3—13.
- [12] Tesch A. A polyhedral study of event-based models for the resource-constrained project scheduling problem[J]. *Journal of Scheduling*, 2020, 23: 233—251.
- [13] 初梓豪, 徐哲. 活动重叠对缩短资源受限项目工期有效性研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(9): 2388—2397.
- Chu Zihao, Xu Zhe. Research on the effectiveness of activities overlapping in reducing project duration under resource constrained condition[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2019, 39(9): 2388—2397.
- [14] 于静, 徐哲, 谢芳. 活动重叠模式与资源约束下的项目调度优化[J]. *管理科学学报*, 2017, 20(9): 36—45.
- Yu Jing, Xu Zhe, Xie Fang. Project scheduling optimization with overlapping modes and resource constraints[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(9): 36—45.
- [15] 谢芳, 徐哲, 于静. 柔性资源约束下的项目调度问题双目标优化[J]. *系统工程理论与实践*, 2016, 36(3): 674—683.
- Xie Fang, Xu Zhe, Yu Jing. Bi-objective optimization for the project scheduling problem with variable resource availability[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2016, 36(3): 674—683.
- [16] Naber A, Kolisch R. MIP models for resource-constrained project scheduling with flexible resource profiles[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 239(2): 335—348.
- [17] 张松, 陈华平, 刘建. 复杂时间约束的水利工程项目调度问题研究[J]. *系统工程学报*, 2016, 31(1): 135—144.
- Zhang Song, Chen Huaping, Liu Jian. Research on the complicated time-constrained project scheduling in water conservancy[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2016, 31(1): 135—144.
- [18] Kong Feng, Dou Dong. Resource-constrained project scheduling problem under multiple time constraints[J]. *Journal of Construction Engineering and Management*, 2021, 147(2): 04020170.
- [19] 谢芳, 李洪波, 柏庆国. 随机多模式资源受限项目调度[J]. *中国管理科学*, 2020, 网络首发: 1—13.
- Xie Fang, Li Hongbo, Bai Qingguo. Stochastic multi-mode resource-constrained project scheduling[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2020, online: 1—13.
- [20] Ma Zhiliang, Li Songyang, Wang Yong, et al. Component-level construction schedule optimization for hybrid concrete structures[J]. *Automation in Construction*, 2021, 125(10): 103607.
- [21] Kannan R, Barton P I. Convergence-order analysis of branch-and-bound algorithms for constrained problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2018, 71: 753—813.
- [22] Davari M, Demeulemeester E. A novel branch-and-bound algorithm for the chance-constrained resource-constrained project scheduling problem[J]. *International Journal of Production Research*, 2018, 57(4): 1265—1282.
- [23] Liu Changchun, Xiang Xi, Zheng Li, et al. An integrated model for multi-resource constrained scheduling problem considering multi-product and resource-sharing[J]. *International Journal of Production Research*, 2018, 56(19): 6491—6511.
- [24] Wang Qiang, Liu Changchun, Zheng Li. A column-generation-based algorithm for a resource-constrained project scheduling problem with a fractional shared resource[J]. *Engineering Optimization*, 2020, 52(5): 798—816.
- [25] Coelho J, Vanhoucke M. An exact composite lower bound strategy for the resource-constrained project scheduling problem[J]. *Computers & Operations Research*, 2018, 93(1): 135—150.
- [26] Ismael de Azevedo G H, Pessoa A A, Subramanian A. A satisfiability and workload-based exact method for the resource constrained project scheduling problem with generalized precedence constraints[J]. *European Journal of Operational Research*, 2021, 289(3): 809—824.
- [27] Guo Weikang, Vanhoucke M, Coelho J, et al. Automatic detection of the best performing priority rule for the resource-constrained project scheduling problem[J]. *Expert Systems with Applications*, 2020, 167: 114116.
- [28] 安晓亭, 张梓琪. 基于改进蚁群优化的多目标资源受限项目调度方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(2): 509—519.
- An Xiaoting, Zhang Ziqi. Multi-objective resource constrained project scheduling problem based on improved ant colony optimization[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2019, 39(2): 509—519.
- [29] Servranckx T, Vanhoucke M. A tabu search procedure for the resource-constrained project scheduling problem with alternative subgraphs[J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 273(3): 841—860.
- [30] Zaman F, Elsayed S, Sarker R, et al. An evolutionary approach for resource constrained project scheduling with uncertain changes[J]. *Computers & Operations Research*, 2020, 125: 105104.

- [31] Chaleshtarti A S, Shadrokh S, Khakifirooz M, et al. A hybrid genetic and Lagrangian relaxation algorithm for resource—constrained project scheduling under nonrenewable resources[J]. *Applied Soft Computing*, 2020, 94: 106482.
- [32] Ren Yifei, Lu Zhiqiang, Liu Xinyi. A branch—and—bound embedded genetic algorithm for resource—constrained project scheduling problem with resource transfer time of aircraft moving assembly line[J]. *Optimization Letters*, 2020, 14(6): 2161—2195.

New 0-1 Mixed Linear Optimization Formulations for a Special Local Resource-constrained Project Scheduling Problem

SU Zhi-xiong¹, QI Jian-xun², ZOU Xin³, WEI Han-ying¹, WEI Ya-feng¹

(1. Business Administration College, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China;

2. School of Economics and Management, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

3. School of Economics and Management, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

Abstract: Resource constraints are often broadly impacting, unavoidable impediments in project execution procedures. A number of recent, topical project management issues, such as the resource-constrained project scheduling problem (RCPSP), have their roots in the resource constraint problem. The RCPSP is *NP*-hard in the strong sense, and current research mainly focuses on the global problem in which all activities are constrained by resource constraints during the whole project process. However, following the development of productivity, enlargement of project size, and diversification and complication of resource capacities, etc., the “local resource-constrained” has been a more significant feature of resource capacities for projects. For example, most time the capacities of common resources could be guaranteed, but the capacities of scarce and expensive resources are constrained and restrict partial related activities requiring them. The recent extensions of RCPSP also reflect the “locality” features of “resource-constrained”, such as reactive RCPSP, RCPSP with resource capacities and requests varying, and multi-RCPSP. However, due to the lack of exploration for the “locality” feature, the computations for the optimal solutions of the above problems are inefficient. In this paper, these RCPSP with the “locality” feature are summarized as local RCPSP, and a typical sub-problem of the local RCPSP is studied, that is, a local RCPSP with “parallel structure” (the activities are parallel to each other). Many other types of scheduling problems, such as the waterway ship scheduling problem, are also equivalent to RCPSPs with “parallel structure”. First, a new perspective for the deterministic local RCPSP is proposed. The problem could be represented in another way. First “resource-unconstrained” is assumed and an initial schedule for the project is proposed such as scheduling each activity to start at its earliest start time. Then “local resource-constrained” is considered and the related activities are adjusted for minimum lengthen of project duration under the resource constraints. In this representation, the scheduling is to sequence the initial n parallel activities as a sequential activity-chain in order to satisfy the resource constraints. Second, the work of exploring the “locality” of the considered local RCPSP is started. The project under finish-to-start-type precedence relations can be represented as a CPM network. The activity time parameters are studied and the considered local RCPSP itself is examined from the angle of the CPM network paths. The relations between the “local scheduling” and the “global optimization” are discovered, which is formulated using activity parameters. This discovery enlightens and helps to draw out the “locality” of the local RCPSP, and the formulations help to compute the project makespan determined by the local scheduling. The formulations are the keys to solving the problem, and result in the considerable reduction of the difficulty of the combinatorial optimization problem. Third, based on the above relations and formulations, 0-1 mixed linear programming models for the local RCPSP are formulated. The models only cover the “local scheduling activities” but could globally optimize the project scheduling problem, therefore have competitiveness compared to the usual formulation models. The competitiveness of the proposed models is evaluated by comparing with current models, and the proposed models are much more competitive to compute tie optimal solutions of medium- and large-size instances. For example, considering instances that arrange 1 renewable resource to execute some 10 parallel activities in a

project including 120 activities, computational experiments test that the CPU times for computing the optimal solution using the proposed models and CPLEX solver are over tens of thousands of times faster than the usual models. And furthermore, considering instances that arrange 1 renewable resource to execute some 300 parallel activities in each project including 9000 activities, computational experiments test that the average CPU times for computing the optimal solutions is 236.16 using the proposed models. The works of exploring the “locality” of the local RCPSP, the relations between “local scheduling” and “global optimization”, and the methods of modelling, are foundations to explore more effective algorithms for the larger- or super large-size problem instances. Furthermore, these works, theories, modelling, and algorithms are also helpful to solve other types of local RCPSP, or even the general RCPSP, which can be extended for application to these problems, and may enlighten ideas and theoretical tools to improve current approaches and explore new ones. The problem statement is the following (1) For the project structure, a project constituting of activity-set $V = \{0, 1, 2, \dots, M, M+1\}$ is represented by a topologically ordered acyclic activity-on-node (AoN) network $G = (V, A)$, in which the set A is used to represent the minimum finish-start precedence relations between activities with a time-lag of zero and the set V represents the activities of the project, embodied by the nodes in the graph. The activities are numbered from a dummy start node (0) to a dummy end node ($M+1$), such that there are M non-dummy nodes. The dummy nodes have a duration of zero and no resource usage. (2) For the resource restraints, the activities (amount of n , $n \ll M$) in subset $V^* \subseteq V$ are executed by one resource. There are no precedence relations between these activities so that they are named as “parallel activities”. The resource is renewable and masters skills required by each activity $i \in V^*$, and can only be assigned to one activity i at each time instead of more activities simultaneously. The goal is to generate a baseline schedule, with starting times s_i and finishing times f_i , and to assign the resource to each activity $i \in V^*$, while minimizing the project makespan. Although the scheduling is “local”, the number of schemes for it reaches $n!$, and the systematic project causes the local scheduling to be “far-reaching”, and the problem may yield to no problems of global scheduling.

Key words: resource-constrained project scheduling; sequence optimization; 0-1 mixed linear programming; network planning technology; project duration